Международный журнал прикладных наук и технологий "Integral"

Научная статья
Original article
УДК 531.36

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГИХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

MATHEMATICAL MODELS OF VISCOELASTIC MECHANICAL SYSTEMS WITH A FINITE NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM

Охотников Е.А., аспирант 1 курса УлГУ, г. Ульяновск, РФ, e-mail: okhokarting@mail.ru

Редченков А.В., аспирант 1 курса УлГУ, г. Ульяновск, РФ, e-mail: medwed20104@yandex.ru

Андреев А.С., доктор физико-математических наук, профессор, УлГУ, г. Ульяновск, РФ, e-mail: asa5208@mail.ru

Okhotnikov E.A., 1st-year graduate student of UlSU, Ulyanovsk, Russia

Redchenkov A. V., 1st-year graduate student of UlSU, Ulyanovsk, Russia

Andreev A.S., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, UlSU, Ulyanovsk, Russia

Аннотация

Моделирование и анализ сплошных наследственных сред, основоположником которого является великий французский ученый В. Вольтерра, получило широкое развитие в связи с использованием новых материалов в конструировании технических систем. Соответственно, это проблема остается актуальной и в настоящее время. В работе излагаются основные элементы механики наследственных сред. Составлены уравнения Лагранжа наследственной дискретной системы в релаксационной форме.

Annotation

Modeling and analysis of continuous hereditary means, the founder of which is the great French scientist V. Volterra, has been widely developed in the field of the use of new materials in the design of technical systems. Accordingly, this problem remains relevant today. The work outlines the basic elements of the mechanics of hereditary funds. The Lagrange equations of the hereditary local system were compiled in relaxation and rheological form.

Ключевые слова

Механическая система, вязкоупругие силы, уравнения движения в форме Лагранжа с релаксационным и реологическим ядрами.

Keywords

Mechanical system, viscoelastic forces, equation of motion in Lagrange form with relaxation and rheological kernels.

1.Модель стандартного наследственного тела. В современной литературе термины вязкоупругость и наследственная упругость равнозначны. Термин «наследственная теория упругости» введен в работах В.Вольтерра [1]. Ю.Н. Работнов [2] отмечает, что этот термин очень точно определяет смысл упругого последействия. Наибольшее распространение для описания наследственных явлений получили модель стандартного реологического тела (тела Кельвина) и слабо – сингулярная модель наследственного тела [3].

Одноосное напряженное состояние стандартного реологического тела описывается дифференциальным состоянием

$$n\dot{\sigma} + \sigma = nE\dot{\varepsilon} + \tilde{E}\varepsilon \qquad (1)$$

где E и $\tilde{E}$ – мгновенный и длительный модули упругости, n – время релаксации.

В механике наследственных дискретных систем сила взаимодействия между точками по аналогии с соотношением (1) описывается уравнением

$$n\dot{P} + P = nc\dot{y} + \tilde{c}y \qquad (2)$$

где c и $\tilde{c}$ – мгновенная и длительная жесткость элемента, реализующего взаимодействие, n – время релаксации, y – деформация (удлинение) элемента.

Разрешая уравнение (2) относительно усилий или удлинений, получают два интегральных уравнения

$$P(t) = c\left(y - \int_0^t R(t-\tau)y(\tau)d\tau\right) \qquad (3)$$

$$y(t) = \frac{1}{c}\left(P - \int_0^t K(t-\tau)P(\tau)d\tau\right) \qquad (4)$$

Здесь

$R(t-\tau) = \frac{\mathrm{c}-\tilde{\mathrm{c}}}{nc}\exp\left(-\frac{t-\tau}{n}\right)$ – ядро релаксации,

$K(t-\tau) = \frac{\mathrm{c}-\tilde{\mathrm{c}}}{nc}\exp\left(-\frac{(t-\tau)\tilde{\mathrm{c}}}{n\mathrm{c}}\right)$- ядро реологии.

Уравнение (3) при фиксированном удлинении $y = y_0$ описывает уменьшение (релаксацию) со временем натяжения P в наследственном элементе; уравнение (4) описывает удлинение (ползучесть) реологичекого элемента.

Если к началу движения системы имеют место реологические и релаксационные процессы, обусловленные предыдущей историей нагружения, то в уравнениях .3) и (4) интегрирование осуществляется в пределах от $-\infty < \tau < t$. Таким образом, стандартную модель наследственного взаимодействия можно описать тремя способами: Дифференциальным уравнением состояния (2), интегральным уравнением релаксации усилий (3) и интегральным уравнением реологии (4). При этом ядра интегральных уравнений (1.3) и (1.4) выражены экспоненциальными функциями.

Дальнейшее развитие модели стандартного реологического тела привело к слабо – сингулярной модели, в которой в качестве ядер релаксации и реологии выбираются слабо сингулярные дробно – экспоненциальные функции вида

$$R(t-\tau) = \frac{Ae^{-\beta(t-\tau)}V(t-\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}$$

$$K(t-\tau) = \frac{A_1 e^{-\beta_1(t-\tau)}V(t-\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}U(t-\tau)$$

где $0 < \alpha < 1$ – некоторое число меньше единицы; $U(t-\tau)$ и $V(t-\tau)$ – некоторые полиномы или ряды по положительным степеням $(t-\tau)$; β и β_1 – коэффициенты релаксации и ползучести. С помощью слабо – сингулярных интегральных уравнений более точно определяются деформации в начальный период нагружения. Слабо – сингулярная модель допускает описание наследственных процессов только в форме интегральных уравнений (3) и (4) со слабо – сингулярными ядрами.

Приведем примеры слабо сингулярных ядер. В работе [3] А. Р. Ржаницын предложил трехпараметрическое ядро релаксации

$$R(t-\tau) = \frac{a}{(t-\tau)^{\alpha}}e^{-\beta(t-\tau)}, \qquad \alpha < 1.$$

М. А. Колтуновым в работе [4] предложено четырех параметрическое ядро

$$R(t-\tau) = \frac{a}{(t-\tau)^{1-\beta}}\exp(-p(t-\tau)^{\alpha}), \qquad \alpha < 1, \beta < 1.$$

Аналогичное ядро для описания свойств высокоэластичной резины предложено Г. Я. Слонимским [5]

$$R(t-\tau) = \frac{a}{(t-\tau)^{1-\beta}}\exp(-p(t-\tau)^{1-\alpha})$$

Уравнения Лагранжа для наследственных дискретных систем. Для описания движения наследственных систем можно построить уравнение Лагранжа в интегро – дифференциальной форме с ядрами релаксаций.

Общее уравнение динамики наследственной системы, состоящей из N материальных точек, имеет вид

$$\sum_{i=1}^{3N}\left(m_i\ddot{x}_i - X_i(t) + \sum_{k=1}^{K} P_k e_{ik}\right)\delta x_i = 0 \qquad (5)$$

где $e_{ik} = e_{ik}(x_1, \dots, x_{sN})$ – направляющие косинусы реакций P_k, $y_k(x_1, \dots, x_{3N})$ - деформации реологических элементов. Реакции наследственных элементов определим релаксационными уравнениями

$$P_k = c_k(y_k - \int_0^t R_k(t-\tau)y_k(\tau)d\tau), \qquad (k = 1, 2, \dots, K) \qquad (6)$$

Количество реологических элементов в системе может быть произвольным.

Пусть движение точек системы ограничивается s=3N-n голономными связями. В этом случае движение системы определяется n обобщенными координатами $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$, а декартовы координаты представляются как функции обобщенных координат $x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$. Переходя к обобщенным координатам и исключая при помощи выражений (6) реакции P_k в общем уравнении динамики (5), получим

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{3N}\left[m_i\ddot{x}_i - X_i(t) + \sum_{k=1}^{K} c_k e_{ik}(y_k - \int_0^t R_k(t-\tau)y_k(\tau)d\tau)\right]\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j = 0 \qquad (7)$$

В соответствии с процедурой, принятой в аналитической механике, уравнение (7) преобразуем к виду

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} - \tilde{Q}_j\right]\delta q_j = 0 \qquad (8)$$

где T и Q_j – кинетическая энергия и обобщенные силы,

$$\Pi = \sum_{i=1}^{3N}\sum_{k=1}^{K} c_k \int_0^{x_i} e_{ik} y_k d\, x_i$$

– потенциальная энергия наследственных элементов, построенная с учетом их мгновенных жесткостей c_k. Выражения

$$\tilde{Q}_j = \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} c_k \int_0^t R_k(t-\tau) y_k\left(q_j(\tau)\right) d\tau$$

являются обобщенными релаксациями реакций реологических элементов.

В силу независимости вариаций обобщенных координат δq_j из уравнения (8) получим уравнение Лагранжа второго рода для наследственной дискретной системы в интегро – дифференциальной форме

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + Q_j + \tilde{Q}_j. \qquad (j = 1,2,\ldots,n)$$

Заключение. Составленные уравнения Лагранжа наследственной дискретной системы в релаксационной форме могут найти широкое применение в моделировании динамики и управления многозвенными манипуляторами с вязкоупругими шарнирами, мобильными роботами в их движении по вязкоупругой поверхности, что является темами научной работы аспирантов, представляющих эту работу.

Список использованной литературы:

1. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.
2. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
3. Ржаницын А.Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. М.: ГТТИ, 1949. 248 с.
4. Колтунов М.А. К вопросу выбора ядер при решении задач с учетом ползучести и релаксации // Механика полимеров. 1966. № 4. С. 483–497.
5. Слонимский Г.Л. О законе деформации высокоэластичных полимерных тел // ДАН СССР. 1961. Т. 140, № 2. С. 343–346.

Bibliography

1. Volterra V. Theory of functionals, integral and integro-differential equations. M.: Nauka, 1982. 304 p.

2. Rabotnov Yu.N. Elements of hereditary mechanics of solids. M.: Nauka, 1977. 384 p.
3. Rzhanitsyn A.R. Some questions of mechanics of systems deforming in time. M.: GTTI, 1949. 248 p.
4. Koltunov M.A. On the issue of choosing kernels when solving problems taking creep and relaxation into account // Polymer Mechanics. 1966. No. 4. P. 483–497.
5. Slonimsky G.L. On the law of deformation of highly elastic polymer bodies // DAN USSR. 1961. T. 140, No. 2. P. 343–346.

Для цитирования: Охотников Е.А., Редченков А.В., Андреев А.С. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГИХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ// Международный журнал прикладных наук и технологий "Integral" №5/2023.