



**МОДЕЛЬ НАГРУЖЕНИЯ ТОРЦА МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА  
ИМПУЛЬСОМ НАПРЯЖЕНИЙ**

**MODEL OF LOADING OF THE END SURFACE OF THE METAL CYLINDER BY  
IMPULSE OF STRAINS**

**УДК 536.212 : 621.785**

**Базайкина Ольга Леонидовна**, кандидат технических наук, доцент кафедры специальной техники и информационных технологий, Владимирский юридический институт ФСИН России, г. Владимир

**Bazaykina O.L.** [bazayolga@yandex.ru](mailto:bazayolga@yandex.ru)

**Аннотация**

В статье рассматривается задача для однородной части уравнения движения термоупругого материала цилиндра, в которой движение материала инициируется внешним энергоисточником. Разработана модель источника в форме импульса напряжённо-деформированного состояния в окрестности одного из торцов цилиндра.

Интерес к задаче обусловлен развитием технологий поверхностного упрочнения металлических изделий методами плазменной, лазерной, электровзрывной обработки их поверхностей.

Автором получены выражения для компонент тензора напряжений в задаче для однородного уравнения движения (при постоянной температуре). Они содержат неопределённые постоянные, что позволяет использовать их в

конструкции общего решения задачи для уравнения движения среды с учётом термических напряжений.

Приведён численный пример расчёта деформаций и напряжений средствами системы компьютерной математики Maple, построены их графики. Использование отрезков рядов Фурье-Бесселя с первыми 24-мя слагаемыми для оценки напряжений даёт удовлетворительные приближения их значений.

### Summary

In paper the problem for a homogeneous member of equation of movement of a thermoelastic material of the cylinder in which movement is initiated by an exterior power source is considered. The model of a source in the form of impulse of the is strain-deformed condition in a neighbourhood of one of cylinder end faces is developed.

Interest to a problem is caused by development of process engineerings of superficial hardening of metal products by methods of plasma, laser, electroexplosive handling of their surfaces.

The author receives expressions for components of a tensor of strains in a problem for a movement homogeneous equation (at constant temperature). They contain indefinite constants that allows to use them in a design of the common decision of a problem for the equation of movement of a medium with the account of thermal strains.

The numerical example of calculation of strains and deformations by means of system of computer mathematics Maple is reduced, their graphs are constructed. Use of segments of series Fourier-Bessel with the first 24 items for an estimation of strains gives their satisfactory approximations.

**Ключевые слова:** однородная часть уравнения движения термоупругой среды, граничные и начальные условия, цилиндр, компоненты тензоров деформаций и напряжений, термоупругий потенциал перемещений, ряд Фурье-Бесселя, графики напряжений.

**Keywords:** homogeneous member of equation of movement of a thermoelastic medium, boundary and initial conditions, the cylinder, components of a tensors of strains and deformations, a thermoelastic potential of transitions, a series Fourier-Bessel, graphs of strains.

**Введение.** Усовершенствование ресурсосберегающих технологий обработки металлов давлением предполагает использования методов поверхностного упрочнения металлических изделий. В основе ряда технологий поверхностного упрочнения лежат методы плазменной, лазерной, электровзрывной обработки их поверхностей энергетическим импульсом [1-4]. Как правило, основной интерес исследователей физических процессов, лежащих в основе этих методов, сосредоточен на динамике температурного поля и её влиянии на фазовый состав упрочняемого слоя.

В то же время переменное температурное поле в импульсе неизбежно порождает в поверхностном слое поле значительных термических напряжений, которые могут привести к возникновению в поверхностном слое микро- и макротрещин. Теоретическая оценка упругих термонапряжений проводится в форме решения общей задачи для уравнения движения термоупругой изотропной среды. Это уравнение является неоднородным уравнением в частных производных 2-го порядка. Задача для него формулируется выбором граничных и начальных условий, реализующих моделирование энергетического импульса в терминах напряжённого состояния. Обычно решение задачи представляется в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения (при нулевой температуре) и какого-либо частного решения неоднородного уравнения. В данной работе рассматриваются первые два вопроса: постановка граничных и начальных условий, реализующих моделирование энергетического импульса в терминах напряжённого состояния; решение задачи для однородного уравнения.

**1 Уравнение математической задачи.** Исходным является классическое уравнение движения термоупругой изотропной среды [5]:

$$\mu \cdot \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \cdot \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}) - \gamma \cdot \text{grad} T = \chi \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}^t - \mathbf{x}$  – вектор смещения материальной точки  $\mathbf{x}$ , занимающей в начальный момент времени  $t_0$  положение  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t_0)$ , в положение  $\mathbf{x}^t = \mathbf{x}(t)$ , занимаемое точкой в момент времени  $t > t_0$ ; вектор  $\mathbf{u}$  «прикреплён» к начальной точке  $\mathbf{x}$ ; на отрезке траектории  $\mathbf{x}^t$  материальной точки  $\mathbf{x}$  при  $t \in [t_0, t]$ ;  $T = T(\mathbf{x}, t)$  – температура материальной точки  $\mathbf{x}$  среды в момент  $t \geq t_0$ ;  $\lambda$  и  $\mu$  – постоянные Ламе; коэффициент  $\gamma = (2\mu + 3\lambda)\beta$ ,  $\beta$  – коэффициент линейного теплового расширения;  $\chi = \chi(\mathbf{x}, t)$  – плотность материала в малой окрестности точки  $\mathbf{x}$  среды в момент  $t \geq t_0$ .

В цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  с осевой симметрией действия операторов  $\Delta \mathbf{u}$ ,  $\text{div} \mathbf{u}$ ,  $\text{grad} \theta$ ,  $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$  представляются [6]:

$$\text{div} \mathbf{u} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{\partial}{\partial z} (ru_z) \right) = \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \text{grad} T = \left( \frac{\partial T}{\partial r}, 0, \frac{\partial T}{\partial z} \right),$$

$$\Delta \mathbf{u} = \left( \Delta u_r - \frac{u_r}{r^2}, 0, \Delta u_z \right).$$

В случае осевой симметрии компоненты тензора упругих линейных деформаций выражаются через координаты  $u_r \equiv u$  и  $u_z \equiv w$  вектора смещения  $\mathbf{u}$ :

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad e_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r}, \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad e_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), \quad \text{объёмное расширение}$$

$$e = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Нетрудно показать, что векторное уравнение движения (1) эквивалентно системе скалярных уравнений движения для двух ненулевых компонент вектора перемещения:

$$\begin{cases} \Delta u - \frac{u}{r^2} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{3\lambda + 2\mu}{\mu} \cdot \beta \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\chi}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \Delta w + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{3\lambda + 2\mu}{\mu} \cdot \beta \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\chi}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (2)$$

Пусть функция  $F(r, \varphi, z)$  – термоупругий потенциал перемещений. Тогда перемещения и деформации представляются [7]:

$$u = \frac{\partial F}{\partial r}, \quad w = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad e = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \Delta F$$

и система (2) представима в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} \Delta F + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \Delta F - \frac{3\lambda + 2\mu}{\mu} \cdot \beta \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\rho}{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial t^2} \left( \frac{\partial F}{\partial r} \right) = \frac{\chi}{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial F}{\partial t^2} \right), \\ \frac{\partial}{\partial z} \Delta F + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Delta F - \frac{3\lambda + 2\mu}{\mu} \cdot \beta \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\rho}{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial t^2} \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right) = \frac{\chi}{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F}{\partial t^2} \right). \end{cases}$$

Интегрируя первое уравнение по переменной  $r$ , а второе – по переменной  $z$ , получим одно и то же уравнение:

$$(\lambda + 2\mu) \Delta F - (3\lambda + 2\mu) \cdot \beta \cdot T = \chi \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Это – неоднородное дифференциальное уравнение (в частных производных) второго порядка для функции  $F(r, \varphi, z)$ . Соответствующее ему однородное уравнение вид:

$$(\lambda + 2\mu) \Delta F - \chi \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0. \quad (4)$$

**2 Разделение переменных для однородного уравнения.** Будем искать решение  $F(r, \varphi, z)$  уравнения (4) в разделяющихся переменных:

$$F(r, z, t) = U_r(r) \cdot U_z(z) \cdot V(t).$$

Подстановка этого представления решения в однородное уравнение приводит к трём обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$а) \frac{d^2 U_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dU_r}{dr} + \nu U_r = 0 \quad - \text{частный случай уравнения Бесселя. Его}$$

общее решение имеет вид:  $U_r(r) = C_1 \cdot J(0, \sqrt{v} \cdot r) + C_2 \cdot Y(0, \sqrt{v} \cdot r)$ , где  $J(0, \sqrt{v} \cdot r)$  – функция Бесселя первого рода нулевого порядка,  $Y(0, \sqrt{v} \cdot r)$  – функция Бесселя второго рода [8] нулевого порядка,  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные,  $v$  – параметр функций.

$$\text{б) } \frac{d^2 U_z}{dz^2} = v \cdot U_z - \text{линейное уравнение с постоянными коэффициентами.}$$

Его общее решение имеет вид:

$$U_z(z) = D_1 \cdot e^{\sqrt{v} \cdot z} + D_2 \cdot e^{-\sqrt{v} \cdot z}. \text{ Выбираем } D_1 = 0, \text{ получаем: } U_z(z) = D_2 \cdot e^{-\sqrt{v} \cdot z}.$$

Итого,  $U(r, z) = U_r(r) \cdot U_z(z) = (C_1 \cdot J(0, \sqrt{v} \cdot r) + C_2 \cdot Y(0, \sqrt{v} \cdot r)) \cdot D_2 \cdot e^{-\sqrt{v} \cdot z} = (Q_1 \cdot J(0, \sqrt{v} \cdot r) + Q_2 \cdot Y(0, \sqrt{v} \cdot r)) \cdot e^{-\sqrt{v} \cdot z}$ ; здесь  $Q_1 = C_1 \cdot D_2$ ,  $Q_2 = C_2 \cdot D_2$  – произвольные постоянные.

$$\text{в) } \frac{d^2 V}{dt^2} = 0, \text{ уравнение имеет общее решение: } V(t) = P_0 + P_1 \cdot t; \quad P_1, P_2 -$$

произвольные постоянные.

Получаем следующую конструкцию термоупругого потенциала:

$$F(r, z, t) = (Q_1 \cdot J(0, \sqrt{v} \cdot r) + Q_2 \cdot Y(0, \sqrt{v} \cdot r)) \cdot e^{-\sqrt{v} \cdot z} \cdot (P_0 + P_1 \cdot t).$$

Так как функции Бесселя второго рода  $n$ -ого порядка имеют особенность при  $r = 0$ , примем значение коэффициента  $Q_2 = 0$ . Имеем:

$$F(r, z, t) = Q \cdot J(0, \sqrt{v} \cdot r) \cdot e^{-\sqrt{v} \cdot z} \cdot (P_0 + P_1 \cdot t). \quad (5)$$

Замечания. Уравнение (4) является волновым уравнением, допускающим и другое разделение аргументов термоупругого потенциала:  $F(r, z, t) = U(r, z) \cdot V(t)$ . Соответственно уравнение (4) распадается на уравнение Гельмгольца

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - kU = 0 \text{ и линейное уравнение } \frac{\chi}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{d^2 V}{dt^2} - kV = 0, \text{ } k -$$

некоторая постоянная. Если продолжить процедуру разделения переменных:

$U(r, z) = U_r(r) \cdot U_z(z)$ , то уравнение Гельмгольца разбивается на уравнение

Бесселя  $\frac{d^2 U_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dU_r}{dr} + \nu U_r = 0$  и линейное уравнение

$\frac{d^2 U_z}{dz^2} - (k + \nu) U_z = 0$ . Все три функции –  $U_r(r)$ ,  $U_z(z)$ ,  $V(t)$  – зависят от

параметров  $k$  и  $\nu$ , а решение  $V(t)$  описывает волновую составляющую процесса:

$$V(t) = P_1 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)}{\chi}} \cdot \sqrt{k} \cdot t\right) + P_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)}{\chi}} \cdot \sqrt{k} \cdot t\right). \quad \text{Конструкция}$$

термоупругого потенциала такова:

$$F(r, z, t) = \left(Q_1 \cdot J(0, \sqrt{\nu} \cdot r) + Q_2 \cdot Y(0, \sqrt{\nu} \cdot r)\right) \cdot e^{-\sqrt{\nu+k} \cdot z} \times \\ \times \left(P_1 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)}{\chi}} \cdot \sqrt{k} \cdot t\right) + P_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)}{\chi}} \cdot \sqrt{k} \cdot t\right)\right).$$

Однако численное решение задач для деформаций и напряжений в цилиндре при адекватных граничных и начальных условиях средствами системы компьютерной математики Maple 17 [9] показало, что физически состоятельное напряжённо-деформированное состояние возможно лишь при значении параметра  $k = 0$ , что возвращает нас к результату (5) этой статьи.

В то же время значение параметра  $k = 0$  обуславливает несжимаемость материала цилиндра, что приблизительно соответствует свойству металлических материалов.

**3 Деформации и напряжения в торце цилиндра в задаче для однородного уравнения.** В выражении (5) объединим произвольную постоянную  $Q$  с двумя другими произвольными постоянными  $P_1$  и  $P_0$ , полагая  $Q \cdot P_0 = P_0$ ,  $Q \cdot P_1 = P_1$ :

$$F(r, z, t) = J(0, \sqrt{\nu} \cdot r) \cdot e^{-\sqrt{\nu} \cdot z} \cdot (P_0 + P_1 \cdot t)$$

Зная  $F(r, z, t)$ , находим компоненты тензора деформаций и объёмное расширение:

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} = \left( \frac{J(1, \sqrt{v} \cdot r)}{\sqrt{v} \cdot r} - J(0, \sqrt{v} \cdot r) \right) \cdot v \cdot e^{-\sqrt{v} \cdot z} \cdot (P_0 + P_1 \cdot t);$$

$$e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = v \cdot J(0, \sqrt{v} \cdot r) \cdot e^{-\sqrt{v} \cdot z} \cdot (P_0 + P_1 \cdot t);$$

$$e_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} = -\frac{1}{r} \cdot \sqrt{v} \cdot J(1, \sqrt{v} \cdot r) \cdot e^{-\sqrt{v} \cdot z} \cdot (P_0 + P_1 \cdot t);$$

$$e_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) = v \cdot J(1, \sqrt{v} \cdot r) \cdot e^{-\sqrt{v} \cdot z} \cdot (P_0 + P_1 \cdot t);$$

$$e = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \Delta F = 0.$$

Так как  $e = 0$ , то компоненты тензора упругих напряжений могут быть представлены через деформации следующим образом [7]:  $\sigma_{rr} = 2G \cdot e_{rr}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi} = 2G \cdot e_{\varphi\varphi}$ ,  $\sigma_{zz} = 2G \cdot e_{zz}$ ,  $\sigma_{rz} = 2G \cdot e_{rz}$ ;  $G$  – модуль сдвига материала цилиндра.

Сформулируем граничные и начальные условия для компонент тензора напряжений.

а) Положим, что в момент времени  $t = 0$  при  $r = 0$ ,  $z = 0$  нормальное напряжение  $\sigma_{zz}$  в центре торца является сжимающим с величиной  $p_v$ :  $\sigma_{zz} = p_v$ ,  $p_v < 0$ ,

$$\begin{aligned} \sigma(v)_{zz} &= 2G \cdot \left( v \cdot J(0, \sqrt{v} \cdot r) \right) \cdot e^{-\sqrt{v} \cdot z} \cdot (P_0 + P_1 \cdot t) = \\ &= 2G \cdot v \cdot P_0 \cdot \left( J(0, \sqrt{v} \cdot r) \right) \cdot e^{-\sqrt{v} \cdot z} \cdot \left( 1 + \frac{P_1}{P_0} \cdot t \right), \end{aligned}$$



$$\sigma(v)_{zz} \Big|_{\substack{z=0 \\ t=0 \\ r=0}} = 2G \cdot v \cdot P_0 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left( 1 + \frac{P_1}{P_0} \cdot 0 \right) = 2G \cdot v \cdot P_0 = p_v; \quad \text{отсюда} \quad \text{смысл}$$

произведения  $v \cdot P_0$ ,  $v \cdot P_0 = \frac{P_v}{2G}$  – доля коэффициента  $p_v$ , привязанного к функции Бесселя  $J(0, \sqrt{v} \cdot r)$ , в значении постоянной  $2G$ .

Получаем выражение  $\sigma(v)_{zz} = p_v \cdot J(0, \sqrt{v} \cdot r) \cdot e^{-\sqrt{v} \cdot z} \cdot \left( 1 + \frac{P_1}{P_0} \cdot t \right)$ . Поскольку  $P_1$

– неопределённая постоянная, то заменим отношение  $\frac{P_1}{P_0}$  произвольной постоянной  $P$ :

$$\sigma(v)_{zz} = p_v \cdot J(0, \sqrt{v} \cdot r) \cdot e^{-\sqrt{v} \cdot z} \cdot (1 + P \cdot t).$$

Заметим, что коэффициент  $p_v$  является постоянным коэффициентом при данном значении  $v$  параметра функции Бесселя,  $v_i$  – один из счётного множества значений параметров, выражающийся через положительные корни уравнения  $J(0, \xi) = 0$ ,  $\xi_i = \sqrt{v_i} \cdot R$ ,  $R$  – радиус цилиндра.

Обозначим  $\sigma_{zz}$  сумму напряжений  $\sigma(v)_{zz}$  по всем значениям  $v_i$  параметра  $v$ :

$$\sigma_{zz} = \left( \sum_{i=1}^{\infty} p_{v_i} \cdot J(0, \sqrt{v_i} \cdot r) \cdot e^{-\sqrt{v_i} \cdot z} \right) \cdot (1 + P \cdot t), \quad (6)$$

Обозначим  $\sigma 1_{zz} = \left( \sum_{i=1}^{\infty} p_i \cdot J(0, \sqrt{v_i} \cdot r) \right)$  единичное значение относительных напряжений  $\frac{\sigma_{zz}}{2G}$  в момент времени  $t = 0$  в любой точке плоскости  $z = 0$ .

Тогда  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i \cdot J(0, \sqrt{v_i} \cdot r)$  – ряд Фурье-Бесселя разложения единицы  $\sigma 1_{zz}$  по

ортогональному базису функций  $\left\{ J(0, \sqrt{v_i} \cdot r) \right\}_{i=1}^{\infty}$  [8]. Коэффициенты  $p_i$

вычисляются по формуле:  $p_i = \frac{2}{R^2 \cdot J^2(1, \xi_i)} \int_0^R r \cdot J(0, \sqrt{v_i} \cdot r) \cdot dr$ , а

напряжения  $\sigma_{zz}$  – по формуле:

$$\sigma_{zz} = 2G \left( \sum_{i=1}^{\infty} p_i \cdot J(0, \sqrt{v_i} \cdot r) \cdot e^{-\sqrt{v_i} \cdot z} \right) \cdot (1 + P \cdot t).$$

б) В выражении радиальных напряжений  $\sigma_{rr}$  выделяем тот же коэффициент  $p_i = 2G \cdot v_i \cdot P_0$ , но связанный уже с другим параметром  $v$  и подчиняющимся граничному условию для  $\sigma_{rr}$ . Именно, при  $r = R$  и любых  $t \geq 0, z \geq 0$  напряжение  $\sigma_{rr} = 0$ :

$$\sigma(v)_{rr} = p_v \cdot \left( J(1, \sqrt{v} \cdot R) \cdot \frac{1}{\sqrt{v} \cdot R} - J(0, \sqrt{v} \cdot R) \right) \cdot e^{-\sqrt{v} \cdot z} \cdot (1 + P \cdot t) = 0.$$

Это возможно при выполнении равенства  $J(1, \xi) = J(0, \xi) \cdot \xi$ , где  $\xi = \sqrt{v} \cdot R$ .

Находим счётное множество положительных корней  $\xi_i = \sqrt{v_i} \cdot R$  этого равенства, значения  $v_i$  параметра  $v$  и суммарное выражение радиальных напряжений:

$$\sigma_{rr} = \left( \sum_{i=1}^{\infty} p_{v_i} \cdot \left( J(1, \sqrt{v_i} \cdot r) \cdot \frac{1}{\sqrt{v_i} \cdot r} - J(0, \sqrt{v_i} \cdot r) \right) \cdot e^{-\sqrt{v_i} \cdot z} \right) \cdot (1 + P \cdot t) \quad (7)$$

Из выражения (7) можно получить разложение функции единичного напряжения  $\sigma_{1_{rr}} = \sigma_{zz} / 2G$  в момент времени  $t = 0$  в любой точке плоскости  $z = 0$  по базису

$$\left\{ J(1, \sqrt{v_i} \cdot r) \cdot \frac{1}{\sqrt{v_i} \cdot r} - J(0, \sqrt{v_i} \cdot r) \right\}_{i=1}^{\infty}$$

в виде ряда Дини-Бесселя [8]:

$$\sigma_{1_{rr}} = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \cdot \left( J(1, \sqrt{v_i} \cdot r) \cdot \frac{1}{\sqrt{v_i} \cdot r} - J(0, \sqrt{v_i} \cdot r) \right),$$

$$p_i = \frac{2}{R^2 \cdot (J^2(0, \xi_i) + J^2(1, \xi_i))} \times \\ \times \int_0^R \left( J(1, \sqrt{v_i} \cdot r) \cdot \frac{1}{\sqrt{v_i}} - r \cdot J(0, \sqrt{v_i} \cdot r) \right) \cdot dr,$$

тогда напряжения  $\sigma_{rr}$  вычисляются по формуле:

$$\sigma_{rr} = 2G \left( \sum_{i=1}^{\infty} p_i \cdot \left( J(1, \sqrt{v_i} \cdot r) \cdot \frac{1}{\sqrt{v_i} \cdot r} - J(0, \sqrt{v_i} \cdot r) \right) \cdot e^{-\sqrt{v_i} \cdot z} \right) \cdot (1 + P \cdot t).$$

в) Требование для окружных напряжений  $\sigma_{\varphi\varphi}$  – их равенство радиальным напряжениям  $\sigma_{rr}$  на оси  $r = 0$  цилиндра. В начальном виде  $\sigma_{\varphi\varphi}$  выделим коэффициент  $p_v$ , свой для параметра  $v$  функции  $\frac{J(1, \sqrt{v} \cdot r)}{\sqrt{v} \cdot r}$ , получим:

$$\sigma(v)_{\varphi\varphi} = -p_v \cdot \left( \frac{J(1, \sqrt{v} \cdot r)}{\sqrt{v} \cdot r} \right) \cdot e^{-\sqrt{v} \cdot z} \cdot (1 + P \cdot t).$$

Сравним его с выражением радиальных напряжений

$$\sigma(v)_{rr} = p \cdot \left( J(1, \sqrt{v} \cdot r) \cdot \frac{1}{\sqrt{v} \cdot r} - J(0, \sqrt{v} \cdot r) \right) \cdot e^{-\sqrt{v} \cdot z} \cdot (1 + P \cdot t) \text{ при } r \rightarrow 0.$$

Так как  $\lim_{\sqrt{v} \cdot r \rightarrow 0} \left( \frac{J(1, \sqrt{v} \cdot r)}{\sqrt{v} \cdot r} \right) = \frac{1}{2}$ ,

$$\lim_{\sqrt{v} \cdot r \rightarrow 0} \left( J(1, \sqrt{v} \cdot r) \cdot \frac{1}{\sqrt{v} \cdot r} - J(0, \sqrt{v} \cdot r) \right) = \left( \frac{1}{2} - 1 \right) = -\frac{1}{2},$$

то формально исходное условие равенства напряжений выполняется:

$$\sigma(v)_{rr} \Big|_{r=0} = \sigma(v)_{\varphi\varphi} \Big|_{r=0} = -\frac{1}{2} p_v \cdot e^{-\sqrt{v} \cdot z} \cdot (1 + P \cdot t).$$

Базис функций  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{v_i} \cdot r} \cdot J(1, \sqrt{v_i} \cdot r) \right\}_{i=1}^{\infty}$ , где  $v_i$  находятся по корням

уравнения  $J(1, \sqrt{v} \cdot R) = 0$ , ортогональный, поэтому суммарные окружные напряжения  $\sigma_{\varphi\varphi}$  запишутся:

$$\sigma_{\varphi\varphi} = - \left( \sum_{i=1}^{\infty} p_{v_i} \cdot \frac{1}{\sqrt{v_i} \cdot r} \cdot J(1, \sqrt{v_i} \cdot r) \cdot e^{-\sqrt{v_i} \cdot z} \right) \cdot (1 + P \cdot t). \quad (8)$$

Единичные напряжения  $\sigma_{\varphi\varphi}^1$ , определяемые в момент времени  $t = 0$  в любой точке плоскости  $z = 0$ , представляются рядом Фурье-Бесселя, выделяемого из структуры (8):

$$\sigma_{\varphi\varphi}^1 = - \left( \sum_{i=1}^{\infty} p_i \cdot \frac{1}{\sqrt{v_i} \cdot r} \cdot J(1, \sqrt{v_i} \cdot r) \right)$$

с коэффициентами  $p_i = \frac{2}{R \cdot \xi_i \cdot J^2(2, \xi_i)} \cdot \int_0^R J(1, \sqrt{v_i} \cdot r) \cdot dr$ . Тогда напряжения

$\sigma_{rr}$  вычисляются по формуле:

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -2G \left( \sum_{i=1}^{\infty} p_i \cdot \frac{1}{\sqrt{v_i} \cdot r} \cdot J(1, \sqrt{v_i} \cdot r) \cdot e^{-\sqrt{v_i} \cdot z} \right) \cdot (1 + P \cdot t)$$

г) Касательные напряжения  $\sigma(v)_{rz}$ , обусловленные параметром  $v$  функции  $J(1, \sqrt{v} \cdot r)$ , имеют вид:

$$\sigma(v)_{rz} = p_v \cdot J(1, \sqrt{v} \cdot r) \cdot e^{-\sqrt{v} \cdot z} \cdot (1 + P \cdot t).$$

Требования к напряжениям  $\sigma_{rz}$  – равенство их нулю на поверхности  $r = R$  цилиндра. Поэтому сумма касательных напряжений находится по всем значениям  $v_i$  параметра  $v$ , определяемым по корням  $\xi_i = \sqrt{v_i} \cdot R$  уравнения  $J(1, \xi) = 0$ , сама сумма запишется:

$$\sigma_{rz} = \left( \sum_{i=1}^{\infty} p_{v_i} \cdot J(1, \sqrt{v_i} \cdot r) \cdot e^{-\sqrt{v_i} \cdot z} \right) \cdot (1 + P \cdot t).$$

Единичное относительное напряжение  $\sigma_{1_{rz}} = \sigma_{rz} / 2G$  представляется рядом Фурье-Бесселя

$$\sigma_{1_{rz}} = \left( \sum_{i=1}^{\infty} p_i \cdot J(1, \sqrt{v_i} \cdot r) \right) \quad (9)$$

с коэффициентами  $p_i = \frac{2}{R^2 \cdot J^2(2, \xi_i)} \cdot \int_0^R r \cdot J(1, \sqrt{v_i} \cdot r) \cdot dr$ . Напряжения  $\sigma_{rz}$

вычисляются по формуле:

$$\sigma_{rz} = 2G \left( \sum_{i=1}^{\infty} p_i \cdot J(1, \sqrt{v_i} \cdot r) \cdot e^{-\sqrt{v_i} \cdot z} \right) \cdot (1 + P \cdot t)$$

Вследствие несжимаемости материала цилиндра временными множителями всех единичных компонент тензора напряжений могут быть только аффинные функции  $V(t) = 1 + P \cdot t$ . В качестве допустимой функции предлагается треугольный импульс длительностью  $\tau_0$  секунд, линейно изменяющийся от 1 при  $t = 0$  до 0 при  $t = \tau_0$ :

$$V(t) = H(t) \cdot \left( 1 - \frac{1}{\tau_0} \cdot t \right) + H(t - \tau_0) \left( \frac{1}{\tau_0} \cdot t - 1 \right),$$

где  $H(t)$  – функция Хевисайда, кусочно-линейная функция.

**4. Численный пример.** Рассмотрим в качестве объекта приложения результатов исследования цилиндр радиуса  $R = 0,012$  м и высотой  $H = 0,010$  м; размеры цилиндра взяты из опубликованных экспериментальных работ.

Упругие коэффициенты Ламе  $\mu = G$  и  $\lambda = 2\mu \cdot \frac{\sigma}{1 - 2\sigma}$  выражаются через модуль

сдвига  $G$  и коэффициент Пуассона  $\sigma$ . В численном примере не использованы данные конкретного материала цилиндра. Представлены графики относительных компонент тензора напряжений в импульсе нагружения торца цилиндра каким-либо внешним фактором, не влияющим на температуру цилиндра.

В выражении суммарного напряжения  $\sigma_{zz}$  использовалось разложение в ряд Фурье-Бесселя единицы  $\sigma_{1_{zz}}$  по базису из ортогональных функций Бесселя 1-го рода нулевого порядка. Ряд оценивался в виде его отрезка из первых 24 функций ряда с параметрами от  $\nu_1$  до  $\nu_{24}$ . Для этого с помощью пакета компьютерной математики Maple 17 находились положительные корни уравнения  $J(0, \xi) = 0$ , где  $\xi_i = \sqrt{\nu_i} \cdot R$ ,  $i = 1..24$ :

2.404825558, 5.52007811, 8.653727913, 11.79153444, 14.93091771, 18.07106397, 21.21163663, 24.35247153, 27.49347913, 30.63460647, 33.77582021, 36.91709835, 40.05842576, 43.19979171, 46.34118837, 49.48260990, 52.62405184, 55.76551076, 58.90698393, 62.04846919, 65.18996480, 68.33146933, 71.47298160, 74.61450064,

$$\sigma_{zz} = 2G \left( \sum_{i=1}^{24} p_i \cdot J(0, \sqrt{\nu_i} \cdot r) \cdot e^{-\sqrt{\nu_i} \cdot z} \right) \cdot \left( H(t) \cdot \left( 1 - \frac{1}{\tau_0} \cdot t \right) + H(t - \tau_0) \left( \frac{1}{\tau_0} \cdot t - 1 \right) \right),$$

длительность импульса напряжений  $\tau_0 = 0,02$  с.

В выражении суммарного напряжения  $\sigma_{\varphi\varphi}$  использовалось разложение в ряд Фурье-Бесселя единицы  $\sigma_{1_{\varphi\varphi}}$  по базису из ортогональных функций Бесселя 1-го рода первого порядка. Ряд оценивался в виде его отрезка из первых 24 функций ряда с параметрами от  $\nu_1$  до  $\nu_{24}$ . Для этого находились положительные корни уравнения  $J(1, \xi) = 0$ ,  $\xi_i = \sqrt{\nu_i} \cdot R$ :

3.831705970, 7.015586670, 10.17346814, 13.32369194, 16.47063005, 19.61585851, 22.76008438, 25.90367209, 29.04682853, 32.18967991, 35.33230755, 38.47476623, 41.61709421, 44.75931900, 47.90146089, 51.04353518, 54.18555364, 57.32752544, 60.46945785, 63.61135670, 66.75322673, 69.89507184, 73.03689523, 76.17869958,

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -2G \left( \sum_{i=1}^{24} p_i \cdot \frac{1}{\sqrt{\nu_i} \cdot r} \cdot J(1, \sqrt{\nu_i} \cdot r) \cdot e^{-\sqrt{\nu_i} \cdot z} \right) \times \left( H(t) \cdot \left( 1 - \frac{1}{\tau_0} \cdot t \right) + H(t - \tau_0) \left( \frac{1}{\tau_0} \cdot t - 1 \right) \right).$$

В выражении суммарного напряжения  $\sigma_{rr}$  использовалось разложение в ряд Дини-Бесселя единицы  $\sigma 1_{rr}$  по базису из комбинаций ортогональных функций Бесселя 1-го рода нулевого и первого порядков. Ряд оценивался в виде его отрезка из первых 24 функций ряда с параметрами от  $\nu_1$  до  $\nu_{24}$ . Находились положительные корни уравнения  $J(1, \xi) = J(0, \xi) \cdot \xi$ , где  $\xi_i = \sqrt{\nu_i} \cdot R$ ,  $i = 1..24$ :

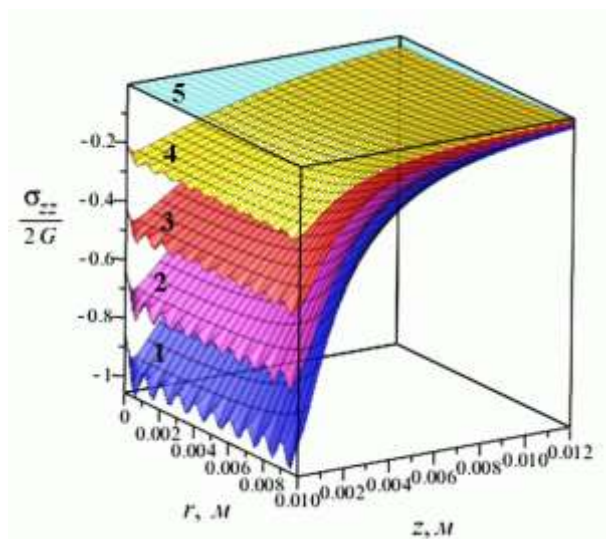
1.841183781, 5.331442774, 8.536316366, 11.70600490, 14.86358863, 18.01552786, 21.16436986, 24.31132686, 27.45705057, 30.60192297, 33.74618290, 36.88998741, 40.03344405, 43.17662897, 46.31959756, 49.46239114, 52.60504111, 55.74757179, 58.89000230, 62.03234787, 65.17462080, 68.31683113, 71.45898711, 74.60109561,

$$\sigma_{rr} = 2G \left( \sum_{i=1}^{24} p_i \cdot \left( J(1, \sqrt{\nu_i} \cdot r) \cdot \frac{1}{\sqrt{\nu_i} \cdot r} - J(0, \sqrt{\nu_i} \cdot r) \right) \cdot e^{-\sqrt{\nu_i} \cdot z} \right) \times \\ \times \left( H(t) \cdot \left( 1 - \frac{1}{\tau_0} \cdot t \right) + H(t - \tau_0) \cdot \left( \frac{1}{\tau_0} \cdot t - 1 \right) \right).$$

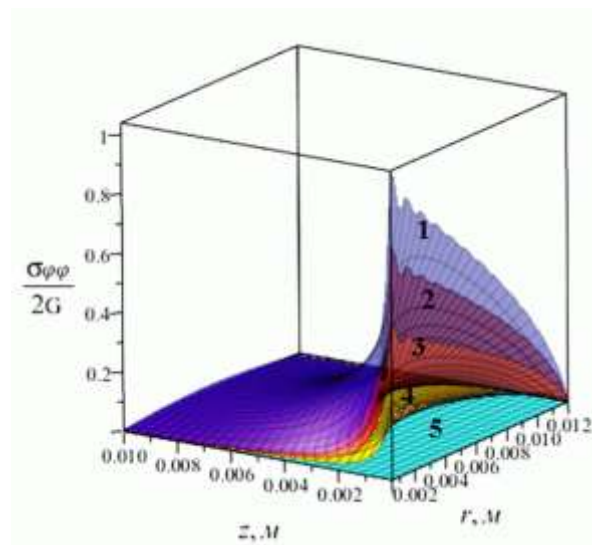
В выражении суммарного касательного напряжения  $\sigma_{rz}$  применялось разложение в ряд Фурье-Бесселя единицы  $\sigma 1_{rz}$  по базису из ортогональных функций Бесселя 1-го рода первого порядка такому же, что был использован для разложения напряжения  $\sigma_{\varphi\varphi}$ . Поэтому находились положительные корни уравнения уравнения  $J(1, \xi) = 0$ ,  $\xi_i = \sqrt{\nu_i} \cdot R$  те же, что и определённые для  $\sigma_{\varphi\varphi}$ , однако базисы функций Бесселя 1-го рода для  $\sigma_{\varphi\varphi}$  и  $\sigma_{rz}$  отличаются множителями, поэтому коэффициенты разложения  $p_i$  напряжений  $\sigma_{\varphi\varphi}$  и  $\sigma_{rz}$  различны,

$$\sigma_{rz} = 2G \left( \sum_{i=1}^{24} p_i \cdot J(1, \sqrt{\nu_i} \cdot r) \cdot e^{-\sqrt{\nu_i} \cdot z} \right) \times \\ \times \left( H(t) \cdot \left( 1 - \frac{1}{\tau_0} \cdot t \right) + H(t - \tau_0) \cdot \left( \frac{1}{\tau_0} \cdot t - 1 \right) \right).$$

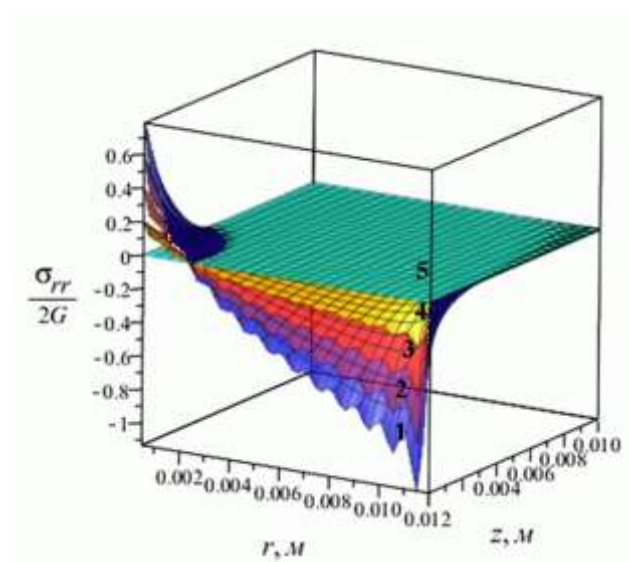
Ниже на рисунке приведены графики, иллюстрирующие распределения компонент тензора напряжений в теле цилиндра.



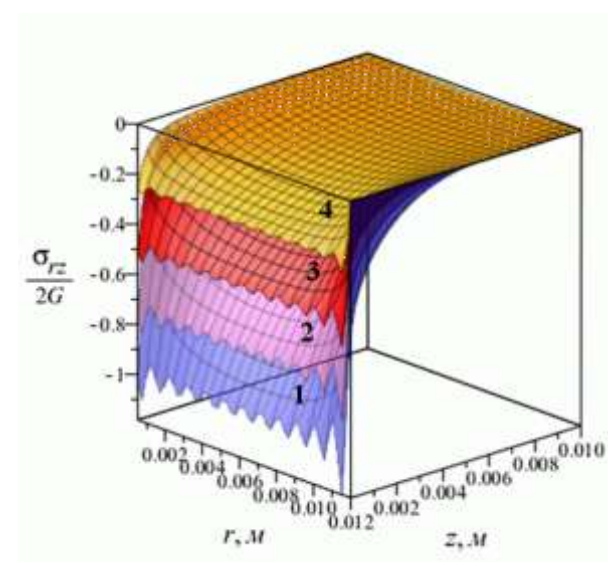
а)



б)



в)



г)

Рисунок – Зависимости относительных напряжений от пространственных координат  $r$  и  $z$ ; а) – осевых  $\sigma_{zz}/2G$ , б) – окружных  $\sigma_{\varphi\varphi}/2G$ , в) – радиальных  $\sigma_{rr}/2G$ , г) – касательных  $\sigma_{rz}/2G$  в различные моменты времени действия импульса напряжений: 1 – в начальный момент, 2 – через 5 мс, 3 – через 10 мс, 4 – через 15 мс, 5 – через 19 мс от начала нагружения импульсом длительностью 20 мс



**Выводы.** Использование рядов Фурье-Бесселя для оценки решения задачи для однородного уравнения движения даёт удовлетворительное приближение. Как следует из графиков, теоретически значения напряжений могут достигать уровня  $2G$ , однако реально возможные значения ограничены пределами упругости и текучести материала. Так, для чувствительной к закалке и отпуску стали 40ХН при температуре  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  модуль сдвига  $G = 77,3\text{ ГПа}$ , а предел текучести  $\sigma_T = (0,2..0,4)\text{ ГПа}$  [10]. Полученные выражения для компонент тензора напряжений содержат неопределённые множители, что позволяет использовать их в конструкции частного решения задачи для уравнения движения термоупругой среды, нагружаемой энергетическим импульсом, при формулировке граничных и начальных условий.

#### Литература

1. Якушин В.Л. Модифицирование углеродистых и низколегированных сталей потоками высокотемпературной импульсной плазмы /В.Л. Якушин // *Металлы*. – 2005. – № 2. С. 12-24.
2. Ivanov, Yu.F. Surface layer of commercially pure VT1-0 titanium after electric-explosion alloying and subsequent treatment by high intensity pulsed electron beam / Yu.F. Ivanov, A.D. Teresov, E.A. Petricova, S.V. Raikov, V.F. Goryushkin, E.A. Budovskikh // *Steel in Translation*. – 2013. – Т.43. – № 12. – P.p. 798-802.
3. Громов В.Е. Электронно-пучковое модифицирование поверхностного слоя наплавки, сформированной на низкоуглеродистой стали электродуговым методом /В.Е. Громов, Ю.Ф. Иванов и [др.] // *Известия РАН. Серия физическая*. – 2017. Том 81. – № 11.
4. Базайкин В.И. Математическое моделирование тепловых процессов при обработке поверхности металлоизделий высококонцентрированными потоками энергии / В.И. Базайкин, О.Л. Базайкина, Т.Н. Осколкова, М.В. Темлянцев // *Изв. вузов. Чёрная металлургия*. – 2017. – № 5. – С. 398-409.

5. Купрадзе В.Д. Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / В.Д. Купрадзе, Т.Г. Гегелия, М.О. Башелейшвили, Т.В. Бурчуладзе // М., Наука. – 1976. – 664 с.
6. Победря Б.Е. Лекции по тензорному анализу / Б.Е. Пообедря // М., Изд-во МГУ. – 1986. – 263 с.
7. Мелан Э. Термоупругие напряжения вызываемые стационарными температурными полями / Э. Мелан, Г. Паркус // М., Госиздат. физ.-мат. литературы. – 1958. – 167 с.
8. Кошляков Н.С. Уравнения в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов // М.: Высшая школа. – 1970. – 707 с.
9. Дьяконов В.П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчётах / В.П. Дьяконов // М.: ДМК. – 2011. – 799 с.
10. Тылкин М.А. Справочник термиста ремонтной службы / М.А.Тылкин // М: Изд-во Metallurgy, 1981.- 648 с.

#### **Literature**

1. Yakushin V.II. Modification of carbon and low-alloy steels by high-temperature pulsed plasma flows / V.L. Yakushin // Metals. - 2005. - No. 2. S. 12-24.
2. Ivanov, Yu.F. Surface layer of commercially pure VT1-0 titanium after electric-explosion alloying and subsequent treatment by high intensity pulsed electron beam / Yu.F. Ivanov, A.D. Teresov, E.A. Petricova, S.V. Raikov, V.F. Goryushkin, E.A. Budovskikh // Steel in Translation. - 2013. - T.43. - No. 12. - P.p. 798-802.
3. Gromov V.E. Electron-beam modification of the surface layer of the surfacing formed on low-carbon steel by the electric arc method / V.E. Gromov, Yu.F. Ivanov and [others] // Izvestiya RAN. Physical series. - 2017. Volume 81. - No. 11.
4. Bazaykin V.I. Mathematical modeling of thermal processes when processing the surface of metal products with highly concentrated energy flows / V.I. Bazaykin,

- O. L. Bazaykina, T.N. Oskolkova, M.V. Temlyantsev // *Izv. universities. Ferrous metallurgy*. - 2017. - No. 5. - S. 398-409.
5. Kupradze V.D. Three-dimensional problems of mathematical theory of elasticity and thermoelasticity / V.D. Kupradze, T.G. Hegelia, M.O. Basheleishvili, T.V. Burchuladze // *M., Science*. - 1976 .-- 664 p.
  6. The victory of B.Ye. Lectures on tensor analysis / B.E. Pobedrya // *M., Moscow State University Publishing House*. - 1986 .-- 263 p.
  7. Melan E. Thermoelastic stresses caused by stationary temperature fields / E. Melan, G. Parkus // *M., Gosizdat. physical-mat. literature*. - 1958 .-- 167 p.
  8. Koshlyakov NS Partial Differential Equations of Mathematical Physics / N.S. Koshlyakov, E.B. Gliner, M.M. Smirnov // *M. : Higher school*. - 1970 .-- 707 p.
  9. Dyakonov V.P. Maple 10/11/12/13/14 in mathematical calculations / V.P. Dyakonov // *M. : DMK*. - 2011 .-- 799 s.
  10. Tylkin M.A. Handbook of a thermist of the repair service / M.A. Tylkin // *M: Publishing house of Metallurgy*, 1981.- 648 p.