Научная статья

Original article

УДК 336.76:519.852

doi: https://doi.org/10.55186/2413046X_2026_11_4_58

edn: LXZUXX

ОПТИМИЗАЦИЯ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ ПО КРИТЕРИЮ РИСКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛИ МАРКОВИЦА

OPTIMIZATION OF AN INVESTMENT PORTFOLIO BASED ON THE RISK CRITERION USING THE MARKOWITZ MODEL

Игонина Татьяна Романовна, к.ф-м.н., доцент кафедры Высшей математики Института искусственного интеллекта, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «МИРЭА – Российский технологический университет», Москва

Кесельман Владимир Михайлович, к.ф-м.н., доцент кафедры Высшей математики Института искусственного интеллекта, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «МИРЭА – Российский технологический университет», Москва

Сазонов Алексей Иванович, к.т.н., доцент кафедры Высшей математики Института искусственного интеллекта, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «МИРЭА – Российский технологический университет», Москва

Борец Александра Сергеевна, ассистент кафедры высшей математики Института искусственного интеллекта, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «МИРЭА – Российский технологический университет», Москва

Igonina Tatyana Romanovna, PhD, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics at the Institute of Artificial Intelligence, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "MIREA – Russian Technological University", Moscow

Keselman Vladimir Mikhailovich, PhD, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics at the Institute of Artificial Intelligence, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "MIREA – Russian Technological University", Moscow

Sazonov Aleksei Ivanovich, PhD, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics at the Institute of Artificial Intelligence, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "MIREA – Russian Technological University", Moscow

Borets Aleksandra Sergeevna, Assistant of the Department of Higher Mathematics at the Institute of Artificial Intelligence, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "MIREA – Russian Technological University", Moscow

Аннотация. В данной работе исследуется применение модели Марковица для оптимизации инвестиционного портфеля по критерию минимизации риска при заданном уровне доходности. Теоретической основой исследования выступает современная портфельная теория, базирующаяся на анализе взаимосвязи между ожидаемой доходностью и уровнем риска финансовых активов. В качестве объектов исследования использованы акции компаний различных отраслей экономики, что обеспечивает необходимый уровень диверсификации портфеля.В ходе работы были рассчитаны логарифмические доходности активов, стандартные отклонения и ковариационная матрица. На основе полученных данных произведен анализ равновзвешенного инвестиционного портфеля, после чего выполнена его оптимизация с использованием модели «риск–доходность» и метода множителей Лагранжа. Дополнительно применялись программные средства

Excel для численного решения задачи оптимизации. Результаты исследования показали, что использование модели Марковица позволяет снизить совокупный риск инвестиционного портфеля при сохранении заданного уровня доходности. Полученные результаты подтверждают эффективность математических методов в задачах управления инвестициями и демонстрируют практическую применимость портфельной теории в условиях финансового рынка.

Abstract. This paper examines the application of the Markowitz model for investment portfolio optimization in terms of risk minimization at a given level of return. The theoretical foundation of the study is based on the Modern Portfolio Theory, which analyzes the relationship between expected return and financial risk. Shares of companies from different sectors of the economy were selected as the research objects in order to ensure portfolio diversification. During the study, logarithmic returns, standard deviations, and the covariance matrix were calculated. Based on the obtained data, an equally weighted investment portfolio was analyzed and subsequently optimized using the mean-variance model and the Lagrange multiplier method. In addition, Microsoft Excel tools were applied for the numerical solution of the optimization problem. The results of the research demonstrate that the Markowitz model makes it possible to reduce the overall portfolio risk while maintaining the target level of return. The obtained findings confirm the effectiveness of mathematical methods in investment management and illustrate the practical applicability of portfolio theory in financial market analysis.
Ключевые слова: модель Марковица, инвестиционный портфель, оптимизация, риск, доходность, диверсификация, ковариация, финансовая математика

Keywords: Markowitz model, investment portfolio, optimization, risk, return, diversification, covariance, financial mathematics

Введение

В условиях современной рыночной экономики задача эффективного распределения капитала между финансовыми активами является одной из ключевых проблем инвестиционного анализа. Инвесторы стремятся обеспечить максимальную доходность вложений при допустимом уровне риска, что требует применения количественных методов анализа и оптимизации. Одной из фундаментальных концепций современной финансовой теории является портфельный подход, разработанный Гарри Марковицем, основанный на анализе соотношения риска и ожидаемой доходности активов [1].

Теория Марковица стала основой современной портфельной теории и положила начало развитию математических методов управления инвестициями. В рамках данной концепции инвестиционный риск рассматривается как статистическая изменчивость доходности активов, измеряемая через дисперсию и стандартное отклонение [2]. При этом ключевым элементом модели выступает диверсификация, позволяющая снизить совокупный риск портфеля за счет комбинирования активов с различной корреляцией доходностей [3].

Современные исследования в области финансовой математики подтверждают, что оптимальное распределение активов оказывает существенное влияние на эффективность инвестиционной стратегии [4]. Использование ковариационной матрицы доходностей и методов математической оптимизации позволяет определить структуру портфеля с минимальным уровнем риска при заданной ожидаемой доходности [1, 2]. В качестве инструмента решения подобных задач широко применяется метод множителей Лагранжа, используемый при нахождении экстремумов функций при наличии ограничений [5].

Несмотря на развитие более сложных финансовых моделей, теория Марковица продолжает активно применяться как в академических исследованиях, так и в практической деятельности инвестиционных фондов и частных инвесторов [6]. Это объясняется относительной простотой модели, математической обоснованностью и возможностью адаптации к различным финансовым инструментам [7].

В настоящем исследовании рассматривается процесс оптимизации инвестиционного портфеля, состоящего из акций компаний различных отраслей экономики. Анализ проводится на основе исторических данных о доходности активов с использованием модели «риск–доходность» Марковица. В ходе исследования рассчитываются ожидаемая доходность, стандартное отклонение, ковариационная матрица, а также определяется структура портфеля с минимальным уровнем риска при заданной ожидаемой доходности [8].

Целью работы является оценка эффективности модели Марковица при минимизации риска инвестиционного портфеля. Для достижения поставленной цели проводится сравнение равновзвешенного портфеля со структурой активов, полученной посредством математической оптимизации [9].

1. Сбор данных

Одним из ключевых принципов модели Марковица является диверсификация инвестиционного портфеля, предполагающая распределение капитала между активами из различных отраслей экономики [1]. Данный подход позволяет снизить совокупный риск портфеля за счет уменьшения зависимости между изменениями доходности отдельных финансовых инструментов [2].

В рамках исследования были собраны неоднородные статистические данные о ценах закрытия акций за каждый месяц с использованием надежных финансовых платформ Yahoo Finance и Investing.com. В выборку вошли акции компаний Tesla (автомобильная промышленность), Berkshire Hathaway (финансовый сектор), Amazon (электронная коммерция) и Vertex

Pharmaceuticals (фармацевтическая отрасль). Несмотря на возможное наличие общих рыночных тенденций, данные компании функционируют в различных секторах экономики и не являются прямыми конкурентами, что соответствует принципу диверсификации инвестиционного портфеля [3].

Для анализа был выбран период с октября 2024 года по сентябрь 2025 года, соответствующий последнему финансовому году США. Все числовые значения в исследовании округлены до сотых долей.

На рисунке 1 представлены исходные данные — ежемесячные цены закрытия акций исследуемых компаний, использованные для дальнейшего расчета доходности и риска инвестиционного портфеля.

Date	Tesla	Berkshire A	Amazon	Vertex
01.09.2024	261,63	691,180	186,33	465,08
01.10.2024	249,85	676,96	186,4	475,98
01.11.2024	345,16	724,04	207,89	468,13
01.12.2024	403,84	680,92	219,39	402,7
01.01.2025	404,6	702,61	237,68	461,68
01.02.2025	292,98	775,00	212,28	479,79
01.03.2025	259,16	798,44	190,26	484,82
01.04.2025	282,16	800,54	184,42	509,5
01.05.2025	346,46	757,40	205,01	442,05
01.06.2025	317,66	728,80	219,39	445,2
01.07.2025	308,27	719,85	234,11	456,87
01.08.2025	333,87	755,28	229	391,02
01.09.2025	444,72	754,20	219,57	391,64

Рисунок 1 – Ежемесячные цены закрытия акций компаний Tesla, Berkshire Hathaway, Amazon и Vertex Pharmaceuticals за период с октября 2024 года по сентябрь 2025 года

2. Расчет ожидаемой доходности

Доходность каждой акции рассчитывалась с использованием логарифмической доходности, основанной на логарифме относительного изменения цены актива. Применение логарифмической доходности является более корректным по сравнению с обычным арифметическим изменением, поскольку данный показатель обладает свойством временной аддитивности и обеспечивает более устойчивую интерпретацию финансовых данных при анализе динамики цен [6]. Кроме того, логарифмическая доходность широко применяется в современной финансовой теории и моделировании инвестиционных процессов [10].

Месячная доходность определялась по следующей формуле:

$$r_i = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \qquad (1)$$

где:

r_i - доходность актива за период;

P_t - цена акции в текущем месяце;

P_{t-1} - цена акции в предыдущем месяце.

Таким образом, месячная доходность акций Tesla за первый период наблюдения (октябрь–ноябрь) рассчитывалась посредством подстановки соответствующих значений цен закрытия в приведенную формулу. Для последующих периодов вычисления выполнялись аналогичным образом: цена текущего месяца принималась в качестве P_t, а цена предыдущего месяца — в качестве P_{t-1}. Данный метод был применен ко всем акциям, включенным в исследуемый инвестиционный портфель.

Ожидаемая месячная доходность определялась как среднее арифметическое значение доходностей за все исследуемые периоды [7]. Общая формула расчета ожидаемой доходности имеет вид:

$$\bar{r} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i \qquad (2)$$

где:

$\bar{r}$ - ожидаемая доходность актива;

r_i - доходность за отдельный период;

n - количество наблюдений.

Подставим данные для акций Tesla:

$$\bar{r} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} r_i = \frac{-4.61 + 15.7 + \cdots + 28.67}{12} = \frac{53.05}{12} \approx 4.42$$

После подстановки значений доходностей акций Tesla была получена ожидаемая месячная доходность данного актива. Аналогичные расчеты были проведены для остальных акций инвестиционного портфеля. В результате была определена первая ключевая переменная модели Марковица — ожидаемая доходность финансовых активов [1].

Следует отметить, что ожидаемая доходность акций Vertex Pharmaceuticals оказалась отрицательной. С позиции классической инвестиционной логики это может свидетельствовать о нецелесообразности включения данного актива в портфель. Однако подобная особенность отражает одно из ограничений модели Марковица, поскольку анализ основывается исключительно на исторических данных, тогда как рыночные тенденции способны изменяться под воздействием внешних экономических и корпоративных факторов [4]. Подобная ограниченность исторических данных также рассматривается в теории эффективного рынка [11].

Несмотря на отрицательную ожидаемую доходность, акции Vertex Pharmaceuticals потенциально могут способствовать снижению совокупного риска портфеля благодаря низкой корреляции с другими финансовыми инструментами. В условиях диверсифицированного портфеля активы с низкой взаимосвязью доходностей способны уменьшать общую волатильность инвестиционного портфеля [2].

3. Расчет стандартного отклонения

Второй ключевой переменной модели является риск, измеряемый посредством стандартного отклонения выборки. Использование выборочного стандартного отклонения обусловлено тем, что анализ основывается на исторических данных и направлен на оценку возможных будущих изменений стоимости активов, а не исключительно на описание уже наблюдаемых значений [9].

Стандартное отклонение характеризует степень разброса доходности относительно ее среднего значения и, следовательно, отражает уровень волатильности финансового актива [2]. В рамках современной портфельной теории именно стандартное отклонение рассматривается как основной количественный показатель инвестиционного риска [1]. Кроме того, высокая волатильность финансовых инструментов непосредственно связана с увеличением неопределенности будущей доходности инвестиций [12].

Стандартное отклонение доходности отдельной акции рассчитывается по следующей формуле:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(r_i - \bar{r})^2}{n-1}} \qquad (3)$$

где:

σ - стандартное отклонение доходности актива;

r_i - доходность за отдельный период;

$\bar{r}$ - ожидаемая доходность актива;

n - количество наблюдений.

Подставим данные для акций Tesla и определим уровень риска данного актива:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{12}(r_i - 4.42)^2}{12 - 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left((-4.61) - 4.42\right)^2 + (32.31 - 4.42)^2 + \cdots + (28.67 - 4.42)^2}{11}}$$

$$= \sqrt{\frac{(-9.03)^2 + (27.89)^2 + \cdots + (24.25)^2}{11}}$$

$$= \sqrt{\frac{81.5409 + 777.8521 + \cdots + 588.0625}{11}} \approx 19.09$$

Следует отметить, что среднее значение в формуле стандартного отклонения фактически представляет собой ожидаемую доходность актива. Таким образом, риск отражает степень отклонения фактической месячной доходности от ее среднего значения. Чем выше величина стандартного отклонения, тем более волатильным и, соответственно, рискованным является финансовый инструмент [10].

Аналогичные вычисления были проведены для остальных акций, включенных в инвестиционный портфель. Полученные результаты представлены в таблице Excel на рисунке 2.

Date	Tesla	Berkshire A	Amazon	Vertex	Tesla	Berkshire	Amazon	Vertex
01.09.2024	261,63	691,180	186,33	465,08				
01.10.2024	249,85	676,96	186,4	475,98	-4,61%	-2,08%	0,04%	2,32%
01.11.2024	345,16	724,04	207,89	468,13	32,31%	6,72%	10,91%	-1,66%
01.12.2024	403,84	680,92	219,39	402,7	15,70%	-6,14%	5,38%	-15,06%
01.01.2025	404,6	702,61	237,68	461,68	0,19%	3,14%	8,01%	13,67%
01.02.2025	292,98	775,00	212,28	479,79	-32,28%	9,81%	-11,30%	3,85%
01.03.2025	259,16	798,44	190,26	484,82	-12,27%	2,98%	-10,95%	1,04%
01.04.2025	282,16	800,54	184,42	509,5	8,50%	0,26%	-3,12%	4,97%
01.05.2025	346,46	757,40	205,01	442,05	20,53%	-5,54%	10,58%	-14,20%
01.06.2025	317,66	728,80	219,39	445,2	-8,68%	-3,85%	6,78%	0,71%
01.07.2025	308,27	719,85	234,11	456,87	-3,00%	-1,24%	6,49%	2,59%
01.08.2025	333,87	755,28	229	391,02	7,98%	4,80%	-2,21%	-15,56%
01.09.2025	444,72	754,20	219,57	391,64	28,67%	-0,14%	-4,21%	0,16%
			Expected return	(Monthly)	4,42%	0,73%	1,37%	-1,43%
				Risk	19,09%	5,07%	8,17%	9,35%

Рисунок 2 – Значения ожидаемой доходности и стандартного отклонения исследуемых акций

4. Построение ковариационной матрицы

Ожидаемая доходность отдельных акций необходима для расчета совокупной доходности инвестиционного портфеля, тогда как стандартное отклонение используется при определении риска отдельных активов. Однако для вычисления общего риска портфеля недостаточно учитывать только волатильность каждого финансового инструмента по отдельности. Необходимо также проанализировать взаимосвязь между изменениями доходностей различных активов [2].

С этой целью строится ковариационная матрица, содержащая значения ковариации для каждой пары акций. Ковариация позволяет определить направление и степень совместного изменения доходностей активов. Положительное значение ковариации указывает на тенденцию активов изменяться в одном направлении, тогда как отрицательное значение свидетельствует о противоположной динамике [6]. Именно учет ковариации является одним из ключевых преимуществ модели Марковица при оценке совокупного риска инвестиционного портфеля [1]. В современной финансовой теории ковариационный анализ также используется как один из базовых инструментов количественного управления рисками [13].

Общая формула ковариации имеет следующий вид:

$$Cov(X,Y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1} \qquad (4)$$

где:

$Cov(X,Y)$ - ковариация между двумя активами;

x_i, y_i -доходности активов за отдельный период;

$\bar{x}, \bar{y}$ - средние значения доходностей;

n - количество наблюдений.

В исследовании использовалась выборочная ковариация, поскольку анализ основывается на исторических данных, представляющих собой лишь часть всех возможных наблюдений финансового рынка [5]. Применение выборочной оценки позволяет получить несмещенную оценку параметров генеральной совокупности.

Для корректности размерностей вычисления проводились в десятичных дробях, где 1 % принимался равным 0.01. Следовательно, все значения месячной доходности предварительно делились на 100. Данный подход соответствует общепринятой практике финансового моделирования [8] и широко используется в эконометрике финансовых рынков [14].

Подставим данные для пары акций Tesla и Berkshire Hathaway и рассчитаем значение ковариации между их доходностями:

$$Cov(T,B) = \frac{\sum_{i=1}^{12}(x_i - 0.042)(y_i - 0.0073)}{12-1}$$

$$= \frac{\big((-0.046) - 0.042\big)\big((-0.0208) - 0.0073\big) + \cdots + (0.2867 - 0.042)((-0.0014) - 0073)}{11}$$

$$\approx \frac{(-0.03)}{11} \approx -0.00273$$

Аналогичные вычисления были выполнены для остальных пар акций, включая ковариацию актива с самим собой, что позволяет определить дисперсию соответствующего финансового инструмента. Полученные результаты представлены в таблице ковариационной матрицы на рисунке 3.

portion(w)	covariance matrix				
		Tesla	Berkshire	Amazon	Vertex
0,25	Tesla	0,033941	-0,00273	0,00763	-0,006746
0,25	Berkshire	-0,00273	0,002418	-0,00176	0,0015626
0,25	Amazon	0,00763	-0,00176	0,006089	-0,001196
0,25	Vertex	-0,00675	0,001563	-0,0012	0,0080788

Рисунок 3 – Ковариационная матрица доходностей исследуемых акций

5. Расчет совокупной доходности и риска портфеля 1/n

После определения ожидаемой доходности и ковариационной матрицы становится возможным расчет совокупной доходности и риска инвестиционного портфеля. На первоначальном этапе рассматривается портфель типа 1/n, при котором капитал распределяется между всеми активами в равных долях [2]. Подобный подход является одним из наиболее простых методов диверсификации и часто используется в качестве базового ориентира при сравнении с оптимизированными инвестиционными стратегиями [15].

Совокупная доходность портфеля определяется как взвешенная сумма ожидаемых доходностей отдельных активов. Общая формула доходности портфеля имеет следующий вид:

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} \omega_i r_i \qquad (5)$$

где:

R_p - ожидаемая доходность портфеля;

ω_i - доля i-го актива в портфеле;

r_i - ожидаемая доходность i-го актива.

В рассматриваемом случае инвестиционный портфель состоит из четырех акций, поэтому доля каждого актива составляет:

$$\omega_i = 0.25$$

После подстановки рассчитанных значений ожидаемой доходности была определена совокупная доходность портфеля:

$$R_p = \sum_{i=1}^{4} 0.25 \cdot r_i = 4.42 \cdot 0.25 + 0.73 \cdot 0.25 + 1.37 \cdot 0.25 - 1.43 \cdot 0.25 \approx 1.27\%$$

Расчет общего риска портфеля производится на основе формулы стандартного отклонения с учетом ковариации между всеми активами. В отличие от доходности, совокупный риск портфеля зависит не только от риска отдельных финансовых инструментов, но и от характера взаимосвязи между их доходностями [1].

Общая формула риска инвестиционного портфеля имеет вид:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \omega_i \omega_j \, Cov(r_i, r_j)} \qquad (6)$$

или, в случае портфеля из четырех активов:

$$\sigma_p = \sqrt{\omega_1^2 cov_{11} + \omega_2^2 cov_{22} + \omega_3^2 cov_{33} + \omega_4^2 cov_{44} + 2(\omega_1 \omega_2 cov_{12} + \cdots + \omega_3 \omega_4 cov_{34})}$$

Для портфеля, состоящего из четырех активов, данное выражение включает дисперсии отдельных акций и ковариации между каждой парой финансовых инструментов. После подстановки полученных ранее значений была рассчитана совокупная волатильность портфеля.

В результате анализа установлено, что ожидаемая доходность равновзвешенного портфеля 1/n составляет 1.27 %, тогда как совокупный риск равен 5.25 %. Полученные результаты демонстрируют соотношение риска и доходности при равномерном распределении капитала между активами [7].

6. Метод множителей Лагранжа

Следующим этапом исследования является оптимизация структуры инвестиционного портфеля посредством изменения долей отдельных акций. Основная цель данного процесса заключается в минимизации совокупного риска портфеля при сохранении заданного уровня ожидаемой доходности [5]. Одним из наиболее распространенных математических методов решения подобных задач выступает метод множителей Лагранжа, применяемый для нахождения экстремумов функций при наличии ограничений [5].

В рамках данной работы метод множителей Лагранжа используется для минимизации риска инвестиционного портфеля при фиксированном уровне доходности. Несмотря на высокую эффективность данного подхода, его практическое применение существенно усложняется при увеличении количества переменных. По этой причине для демонстрации математической сущности метода рассматривается упрощенный случай портфеля, состоящего из двух активов: Tesla и Berkshire Hathaway. Оптимизация полного портфеля из четырех активов будет выполнена позднее с использованием программных средств Excel [8].

Цель оптимизации состоит в достижении ожидаемой доходности 1.27 % - аналогичной доходности равновзвешенного портфеля 1/n -при минимально возможном уровне риска. Перед построением функции Лагранжа необходимо задать систему ограничений. Первое ограничение заключается в том, что сумма долей всех активов должна быть равна единице, то есть весь инвестиционный капитал должен быть полностью распределен между финансовыми инструментами. Второе ограничение предполагает сохранение заданного уровня ожидаемой доходности портфеля [6].

Условие полной аллокации капитала имеет следующий вид:

$$\omega_1 + \omega_2 = 1$$

Условие фиксированной доходности портфеля:

$$\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 = 0.0127$$

где:

ω_1, ω_2 - доли активов в портфеле;

r_1, r_2 - ожидаемые доходности акций.

Согласно ранее выполненным расчетам, ожидаемая доходность акций Tesla составляет 4.42 % (0.0442), тогда как ожидаемая доходность акций Berkshire Hathaway равна 0.73 % (0.0073). Значения ковариационной матрицы были определены на предыдущем этапе исследования.

Минимизация риска инвестиционного портфеля при заданной доходности осуществляется посредством функции Лагранжа. Общая формула задачи минимизации риска для n активов имеет следующий вид [5]:

$$L(\omega, \lambda_1, \lambda_2) = \sigma_p^2 + \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i - 1 \right) + \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i r_i - R \right) \qquad (7)$$

На основе общей формулы была выведена функция Лагранжа для случая двух активов:

$$\begin{aligned} L(\omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2) \\ &= \omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 cov(r_1, r_2) + \lambda_1 (\omega_1 + \omega_2 - 1) \\ &+ \lambda_2 (\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 - 0.0127) \end{aligned}$$

После подстановки числовых значений была получена конкретная функция Лагранжа для исследуемого инвестиционного портфеля. Следующим этапом стало формирование системы уравнений путем нахождения частных производных функции Лагранжа по всем переменным и приравнивания их к нулю [5].

Необходимые условия экстремума имеют следующий вид:

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_1} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \omega_2} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0$$

Решение системы уравнений было выполнено с использованием Microsoft Excel. В результате оптимизации установлено, что оптимальная доля акций Tesla составляет 15.13 %, тогда как доля акций Berkshire Hathaway равна 84.87 %. Для упрощения последующих вычислений значения были округлены до 0.15 и 0.85 соответственно.

После подстановки полученных коэффициентов в формулу совокупного риска было установлено, что минимальный риск портфеля при доходности 1.27 % составляет 4.26 %. Следовательно, применение метода множителей Лагранжа позволило снизить уровень риска по сравнению с равновзвешенным портфелем 1/n, риск которого ранее был определен как 5.25 %. Полученные результаты подтверждают эффективность математических методов оптимизации при управлении инвестиционным портфелем [4].

7. Решение задачи оптимизации

После рассмотрения упрощенного случая с двумя активами была выполнена оптимизация полного инвестиционного портфеля, состоящего из четырех акций. Для решения задачи использовались программные средства Microsoft Excel, позволяющие эффективно проводить вычисления при большом количестве переменных и ограничений [8].

Цель оптимизации заключалась в нахождении такой структуры инвестиционного портфеля, при которой ожидаемая доходность сохраняется на уровне 1.27 %, однако совокупный риск принимает минимально возможное значение. В качестве исходных данных использовались рассчитанные ранее значения ожидаемой доходности, стандартных отклонений и ковариационной матрицы [1].

Оптимизация производилась на основе модели «риск–доходность» Марковица, предполагающего поиск оптимального соотношения между риском и доходностью финансовых активов [4]. Для вычислений применялся инструмент Excel Solver, предназначенный для решения задач математической оптимизации с ограничениями [8]. Результаты оптимизации инвестиционного портфеля представлены на рисунке 4.

portion(w)	covariance matrix				
		Tesla	Berkshire	Amazon	Vertex
0,12	Tesla	0,033941	-0,00273	0,0076304	-0,006746
0,88	Berkshire	-0,00273	0,002418	-0,0017602	0,0015626
0,06	Amazon	0,00763	-0,00176	0,0060892	-0,001196
0,00	Vertex	-0,00675	0,001563	-0,001196	0,0080788
portion(w)		0,12	0,88	0,06	0,00
Total reurn		1,27%		Sheme 1/n	1,27%
Total risk		4,22%			5,25%
Budget		1			

Рисунок 4 – Результаты оптимизации инвестиционного портфеля в Microsoft Excel Solver

В результате применения программных методов удалось снизить совокупный риск инвестиционного портфеля на 1.03 процентного пункта при сохранении прежнего уровня ожидаемой доходности, равного 1.27 %. Полученные результаты подтверждают, что оптимальное распределение долей активов позволяет существенно повысить эффективность инвестиционного портфеля по сравнению с равновзвешенной стратегией 1/n [15].

Следует отметить, что в процессе оптимизации акции Vertex Pharmaceuticals фактически были исключены из оптимального портфеля. Данный результат объясняется отрицательной ожидаемой доходностью данного актива, вследствие чего его включение приводило к ухудшению соотношения риска и доходности портфеля.

Таким образом, применение программных методов оптимизации позволило получить более эффективную структуру инвестиционного портфеля с меньшим уровнем риска при сохранении целевого уровня доходности. Полученные результаты демонстрируют практическую значимость математических методов и вычислительных технологий в задачах управления инвестициями [7].

Заключение

В ходе исследования была проанализирована возможность применения модели Марковица для оптимизации инвестиционного портфеля по критерию минимизации риска. В качестве основы исследования использовались исторические данные о ценах закрытия акций компаний Tesla, Berkshire Hathaway, Amazon и Vertex Pharmaceuticals, представляющих различные отрасли экономики. Такой подход позволил сформировать диверсифицированный инвестиционный портфель и исследовать взаимосвязь между доходностью и уровнем риска финансовых активов.

В процессе работы были рассчитаны логарифмические доходности акций, ожидаемая доходность, стандартные отклонения и ковариационная матрица. Полученные результаты показали, что риск инвестиционного портфеля определяется не только волатильностью отдельных активов, но и степенью взаимосвязи между их доходностями.

На первом этапе исследования был проанализирован равновзвешенный портфель 1/n, в котором капитал распределялся между всеми активами в одинаковых долях. Расчеты показали, что ожидаемая доходность данного портфеля составила 1.27 %, тогда как совокупный риск достиг 5.25 %.

Далее была выполнена оптимизация структуры инвестиционного портфеля с использованием метода множителей Лагранжа и программных средств Microsoft Excel Solver. В результате оптимизации удалось сохранить уровень ожидаемой доходности на уровне 1.27 %, одновременно снизив риск портфеля до 4.26 %. Таким образом, совокупный риск был уменьшен на 1.03 процентного пункта по сравнению с равновзвешенной стратегией.

Полученные результаты демонстрируют, что модель Марковица позволяет повысить эффективность инвестиционного портфеля посредством оптимального распределения долей активов. Исследование также показало, что активы с отрицательной ожидаемой доходностью, такие как акции Vertex

Pharmaceuticals, могут исключаться из оптимального портфеля, если их включение ухудшает соотношение риска и доходности.

Вместе с тем были выявлены ограничения модели. Основным недостатком является зависимость расчетов от исторических данных, которые не гарантируют сохранения аналогичных рыночных тенденций в будущем. На динамику финансовых рынков могут оказывать влияние макроэкономические, политические и корпоративные факторы, не учитываемые в классической модели Марковица.

В целом проведенное исследование подтвердило практическую значимость математических методов в области управления инвестициями. Использование модели Марковица, методов математической оптимизации и вычислительных инструментов позволяет более эффективно управлять инвестиционным портфелем и снижать уровень финансового риска при сохранении целевой доходности.

Список источников

1. Markowitz H. Portfolio Selection // The Journal of Finance. — 1952. — Vol. 7, No. 1. — P. 77–91.
2. Elton E. J., Gruber M. J. Modern Portfolio Theory and Investment Analysis. — 9th ed. — Wiley, 2014.
3. Bodie Z., Kane A., Marcus A. Investments. — 11th ed. — McGraw-Hill Education, 2018.
4. Fabozzi F. J., Gupta F., Markowitz H. The Legacy of Modern Portfolio Theory // The Journal of Investing. — 2002. — Vol. 11, No. 3. — P. 7–22.
5. Chiang A. C., Wainwright K. Fundamental Methods of Mathematical Economics. — McGraw-Hill, 2005.
6. Luenberger D. G. Investment Science. — Oxford University Press, 2013.
7. Reilly F. K., Brown K. C. Investment Analysis and Portfolio Management. — 10th ed. — Cengage Learning, 2011.
8. Benninga S. Financial Modeling. — 4th ed. — MIT Press, 2014.

9. Hull J. C. Risk Management and Financial Institutions. — 5th ed. — Wiley, 2018.
10. Sharpe W. F. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk // The Journal of Finance. — 1964. — Vol. 19, No. 3. — P. 425–442.
11. Fama E. F. Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work // The Journal of Finance. — 1970. — Vol. 25, No. 2. — P. 383–417.
12. Ross S. A., Westerfield R., Jaffe J. Corporate Finance. — 11th ed. — McGraw-Hill Education, 2016.
13. Jorion P. Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk. — 3rd ed. — McGraw-Hill, 2007.
14. Campbell J. Y., Lo A. W., MacKinlay A. C. The Econometrics of Financial Markets. — Princeton University Press, 1997.
15. DeMiguel V., Garlappi L., Uppal R. Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient is the 1/N Portfolio Strategy? // The Review of Financial Studies. — 2009. — Vol. 22, No. 5. — P. 1915–1953.
16. Математическое моделирование аномальных доходностей криптовалют под воздействием инфоповодов / А. А. Сидоров, Т. А. Бурцева, Е. С. Дарда, О. Р. Параскевопуло // Московский экономический журнал. – 2026. – Т. 11, № 2. – С. 204-241. – DOI 10.55186/2413046X_2026_11_2_27. – EDN ZESDHX.
17. Сидоров, А. А. Сравнительный анализ двух комбинаторных методов вычисления математического ожидания наилучшего ранга в задаче о размещении / А. А. Сидоров, Р. У. Астафьев // Оптические технологии, материалы и системы (Оптотех - 2025) : Международная научно-техническая конференция, Москва, 08–12 декабря 2025 года. – Москва: МИРЭА - Российский технологический университет, 2026. – С. 1125-1131. – EDN ACIABJ.
18. Астафьев, Р. У. Имитационное моделирование сложных иерархических систем / Р. У. Астафьев // НАУКА XXI ВЕКА: ВЫЗОВЫ, СТАНОВЛЕНИЕ,

развитие: сборник статей XXIV Международной научно-практической конференции, Петрозаводск, 24 ноября 2025 года. – Петрозаводск: Международный центр научного партнерства «Новая Наука» (ИП Ивановская И.И.), 2025. – С. 287-291. – EDN QTROAE.

References

1. Markowitz H. Portfolio Selection // The Journal of Finance. — 1952. — Vol. 7, No. 1. — P. 77–91.
2. Elton E. J., Gruber M. J. Modern Portfolio Theory and Investment Analysis. — 9th ed. — Wiley, 2014.
3. Bodie Z., Kane A., Marcus A. Investments. — 11th ed. — McGraw-Hill Education, 2018.
4. Fabozzi F. J., Gupta F., Markowitz H. The Legacy of Modern Portfolio Theory // The Journal of Investing. — 2002. — Vol. 11, No. 3. — P. 7–22.
5. Chiang A. C., Wainwright K. Fundamental Methods of Mathematical Economics. — McGraw-Hill, 2005.
6. Luenberger D. G. Investment Science. — Oxford University Press, 2013.
7. Reilly F. K., Brown K. C. Investment Analysis and Portfolio Management. — 10th ed. — Cengage Learning, 2011.
8. Benninga S. Financial Modeling. — 4th ed. — MIT Press, 2014.
9. Hull J. C. Risk Management and Financial Institutions. — 5th ed. — Wiley, 2018.
10. Sharpe W. F. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk // The Journal of Finance. — 1964. — Vol. 19, No. 3. — P. 425–442.
11. Fama E. F. Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work // The Journal of Finance. — 1970. — Vol. 25, No. 2. — P. 383–417.
12. Ross S. A., Westerfield R., Jaffe J. Corporate Finance. — 11th ed. — McGraw-Hill Education, 2016.

13. Jorion P. Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk. — 3rd ed. — McGraw-Hill, 2007.
14. Campbell J. Y., Lo A. W., MacKinlay A. C. The Econometrics of Financial Markets. — Princeton University Press, 1997.
15. DeMiguel V., Garlappi L., Uppal R. Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient is the 1/N Portfolio Strategy? // The Review of Financial Studies. — 2009. — Vol. 22, No. 5. — P. 1915–1953.
16. Matematicheskoe modelirovanie anomal`ny`x doxodnostej kriptovalyut pod vozdejstviem infopovodov / A. A. Sidorov, T. A. Burceva, E. S. Darda, O. R. Paraskevopulo // Moskovskij e`konomicheskij zhurnal. – 2026. – T. 11, № 2. – S. 204-241. – DOI 10.55186/2413046X_2026_11_2_27. – EDN ZESDHX.
17. Sidorov, A. A. Sravnitel`ny`j analiz dvux kombinatorny`x metodov vy`chisleniya matematicheskogo ozhidaniya nailuchshego ranga v zadache o razmeshhenii / A. A. Sidorov, R. U. Astaf`ev // Opticheskie texnologii, materialy` i sistemy` (Optotex - 2025) : Mezhdunarodnaya nauchno-texnicheskaya konferenciya, Moskva, 08–12 dekabrya 2025 goda. – Moskva: MIRE`A - Rossijskij texnologicheskij universitet, 2026. – S. 1125-1131. – EDN ACIABJ.
18. Astaf`ev, R. U. Imitacionnoe modelirovanie slozhny`x ierarxicheskix sistem / R. U. Astaf`ev // NAUKA XXI VEKA: VY`ZOVY`, STANOVLENIE, razvitie : sbornik statej XXIV Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii, Petrozavodsk, 24 noyabrya 2025 goda. – Petrozavodsk: Mezhdunarodny`j centr nauchnogo partnerstva «Novaya Nauka» (IP Ivanovskaya I.I.), 2025. – S. 287-291. – EDN QTROAE.